Carlo Felice Manara.

Milano, Conferenza Mathesis, 21 ottobre 1977

Programmazione e decisione in matematica elementare.

1 – "*….La differenza fra noi e gli allievi affidati alle nostre cure sta solo in ciò, che noi abbiamo percorso un più lungo tratto della parabola della vita. Se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare. Né vale addossare la responsabilità alle scuole inferiori. Dobbiamo prendere gli allievi come sono, e richiamare ciò che essi hanno dimenticato, o studiato sotto altra nomenclatura. Se l'insegnante tormenta i suoi alunni, e invece di cattivarsi il loro amore, eccita odio contro sé e la scienza che insegna, non solo il suo insegnamento sarà negativo, ma il dover convivere con tanti piccoli nemici sarà per lui un continuo tormento. Ognuno si fabbrica da sé la sua fortuna, buona o cattiva. Chi è causa del suo mal, pianga se stesso. Così disse Giove, e lo riferisce Omero, Odissea I, 34".* Queste parole non sono di un contestatore giovane moderno, ma di un grande maestro della matematica, Giuseppe Peano, che le scriveva nella "Conclusione" di un suo libretto, scritto più di cinquanta anni fa, col titolo: *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*. (Torino, Paravia, 1925).


G. PEANO

GIOCHI DI ARITMETICA
E PROBLEMI INTERESSANTI

G. B. PARAVIA & C.

A prima vista, queste parole ci appaiono un po' inquietanti, perché rivelano un atteggiamento che è stranamente analogo a quello degli studenti contestatori: secondo costoro infatti, "se lo studente non capisce, il torto è sempre del professore". Crediamo sia da escludere che gli studenti contestatori di oggi siano andati a leggere il libretto citato di Peano; molto probabilmente costoro ignorano addirittura l'esistenza di quel grande matematico; e d'altra parte la grande differenza fra loro e Peano, oltre la statura dell'intelligenza, beninteso, è data a mio parere dal fatto che Peano scriveva le sue parole – come abbiamo detto – alla fine di un libro in cui dava agli insegnanti i mezzi per rendere interessante il loro insegnamento, e li aiutava quindi nel loro lavoro: faceva quindi quello che oggi si suo dire "critica costruttiva", che è ben diversa dalla pura riprovazione e dalla protesta non motivata.

Il Peano scriveva questa frase di chiusura: "*Con questi principi, caro lettore e collega, vivrai felice*". Non intendiamo aderire completamente all'opinione del grande matematico, e dare a queste sue prescrizioni la dignità di ricetta per una vita felice; ma non possiamo negare che vi sia della verità nel suo pensiero. Vale quindi la pena di cercare nell'evoluzione della matematica recente le occasioni per interessare i nostri allievi, e per dare una giusta idea della matematica che insegniamo.

Non pensiamo infatti di essere molto lontani dalla realtà dicendo che questa nostra scienza viene spesso considerata come un insieme di regole, di enunciati e di formule, che non sono sufficientemente motivati e quindi si presentano come delle imposizioni ulteriori, e di conseguenza vendono considerati – secondo il vocabolario corrente – delle espressioni della struttura repressiva della scuola.

Anche l'insegnamento elementare può arricchirsi di problemi e di strumenti per rendere interessante l'insegnamento, nello spirito delle parole di Peano che ho citato all'inizio, e per dare un'immagine più vasta della matematica, come procedimento razionale. A questo proposito vorrei ricordare quanto diceva D. Hilbert, nella sua celebre conferenza, tenuta al Congresso internazionale dei matematici di Parigi (1900): "*I segni ed i simboli dell'aritmetica sono figure scritte, così come le figure della geometria sono formule disegnate*…"

Pertanto vorrei insistere sul fatto che non è utile restringere la trattazione ai temi classici, ed escludere le illustrazioni, le rappresentazioni intuitive, le figure come poco rigorose, o con altri pretesti. Prosegue infatti Hilbert dicendo: "*L'impiego dei simboli geometrici come metodo rigoroso di dimostrazione presuppone la conoscenza esatta degli assiomi che stanno alla base di queste figure ed il completo dominio di questi assiomi; è dunque necessaria una discussione assiomatica rigorosa del contenuto intuitivo delle figure geometriche perché queste possano essere incorporate nel patrimonio generale dei simboli matematici*…"

Come si vede, è interessante osservare che Hilbert ammette i simboli geometrici come metodo rigoroso di dimostrazione. E questo enunciato potrebbe essere considerato come una precisazione dell'impiego che tutti noi facciamo delle figure e delle illustrazioni; il che del resto si fa abitualmente, perché tutti sono coscienti del fatto che le lavagne su cui disegniamo non sono speculari (ed anche se lo fossero non sarebbero dei piani geometrici), e le rette che disegniamo non sono affatto perfettamente rettilinee; tuttavia nessuno fa passare due rette diverse per due punti distinti, il che significa che ognuno rispetta l'assioma che vuole che due punti distinti determinino una ed una sola retta.

Ho richiamato le frasi di Hilbert perché queste possono aiutare anche nel retto uso della modellistica in quella che viene abitualmente chiamata la "geometria intuitiva"; va da sé che l'uso dei modelli può essere molto utile per stimolare la fantasia, per allenare gli allievi ad immaginare i rapporti spaziali, alla trasposizione della immagine linguistica alla realtà e viceversa. Ma vorrei dire che la modellistica deve essere presentata senza dimenticare il suo significato di simbolo e soprattutto con l'intenzione sempre presente del fatto che occorre passare dall'intuizione alla trattazione razionale, perché è soltanto questa che può dare la formazione matematica degli allievi.

Non voglio iniziare qui una discussione filosofica e in particolare mettermi a discettare sulla teoria platonica della conoscenza come "reminiscenza"; ma vorrei soltanto osservare che uno degli scopi del nostro insegnamento dovrebbe essere quello di rendere gli allievi coscienti del fatto che essi utilizzano certe proprietà "naturali" del linguaggio dei numeri, e quindi condurli ad una precisa coscienza di queste proprietà, in modo che esse vengano considerate, in modo esplicito e cosciente, come delle proprietà sintattiche del linguaggio che si utilizza.

Ho detto queste cose, perché vorrei che fossero un'introduzione all'accettazione degli schemi di programmazione che faremo tra i simboli matematici, aventi una loro sintassi intuitiva (analoga a quella delle figure convenzionali geometriche) e quindi una loro sintassi che può condurre a risultati rigorosi quando è rispettata. Ho parlato di programmazione e non vorrei essere indotto a cercare una definizione di questo termine; prendiamone quindi il significato che ci viene dal linguaggio comune, anche se questo termine può essere preso in un'accezione politica che risveglia forse delle suscettibilità non pienamente ingiustificate. Molto spesso il vocabolo viene utilizzato in relazione a problemi di ottimizzazione, e quindi assume anche un significato economico (in senso molto lato, ovviamente); ma si possono anche considerare dei casi in cui un problema matematico non può essere risolto con una formula, con un calcolo diretto e quindi la razionalità del procedimento consiste nell'analizzare i casi possibili per trovare la soluzione o le soluzioni, e nel programmare i tentativi in modo da essere sicuri che non è stato trascurato alcun caso.

In questo ordine di idee si incontrano procedimenti di tal tipo anche nella aritmetica elementare; e ritengo non inutile rimeditare qualcuno di questi procedimenti, per esplicitare in modo abbastanza preciso i presupposti che vengono utilizzati e le proprietà che vengono tacitamente rispettate. Ciò mi offre il destro di riattaccarmi alle parole di Peano, per cercare qualche occasione di presentare la matematica non come un coacervo di regole e di formule, ma come un insieme di procedimenti razionali. Per modo che la matematica, intesa in questo modo, ammette una quantità di applicazioni che non le competerebbero se fosse intesa soltanto come scienza dei numeri o della quantità, come ancora da qualcuno (o da troppi) viene considerata.

Abbiamo finora parlato di scelte, di decisioni nelle "flow-charts" che programmano dei procedimenti algoritmici. In questo senso osserviamo che gli algoritmi non sono finiti, almeno in linea di principio; si potrebbe facilmente pensare ad un algoritmo di approssimazione della radice quadrata che non è finito. Non vogliamo qui addentrarci nella discussione in questa direzione, perché non entrerebbe negli scopi di questa conferenza. Vogliamo invece osservare che nelle decisioni che abbiamo cercato di illustrare in precedenza, le decisioni sono state prese molto spesso, se non sempre, mediante confronti; il confronto viene fatto fra due numeri e la decisione dipende da quale dei due numeri è maggiore dell'altro. Ne consegue che la decisione che abbiamo preso in considerazione finora è strettamente collegata con quella che vedremo subito, e che conduce ai problemi di ottimizzazione. In forma approssimata si potrebbe dire che un problema cosiffatto cerca di rispondere alla domanda che porta a decidere quale numero sia il massimo di un insieme, quale funzione dia il massimo di un determinato funzionale.

Dato il carattere di questa trattazione, non prenderemo in considerazione i procedimenti per rispondere a quei problemi che prendono in considerazione degli insiemi infiniti. Infatti abitualmente questi problemi fanno intervenire dei procedimenti che non sono completamente elementari. Invece i procedimenti che riguardano degli insiemi finiti sono particolarmente adatti per lo scopo che ci interessa, e che consiste nel dare un'immagine di certi domini non abituali della matematica, e di interessare gli studenti in problemi che si risolvono con metodi non completa mente tradizionali. Va osservato che si tratta qui di idee non completamente nuove; infatti ricordiamo che nella matematica dei licei scientifici la discussione dei problemi di secondo grado, che prendeva tanta parte nei programmi di allora (in quelli di oggi non so) era sostanzialmente basata sull'analisi di certi confronti, che portava a certe decisioni (di ammettere o non ammettere certe determinazioni della radice quadrata, di ammettere on non ammettere certe radici in relazione al loro significato contingente, di ammettere o di escludere certi valori del parametro o dei parametri, in vista della necessaria realtà delle radici, e così via…). In altre parole, le decisioni che sono prese in seguito a confronto, e quindi conseguono dalle proprietà formali del campo reale, di ordinamento totale, non sono una novità. In certo modo nuovo è soltanto il modo di presentarle ed il campo più vasto in cui tali decisioni vengono adottate.

NdR- marzo 2013. I problemi di Peano si possono trovare al sito seguente:

http://www.archimedes-lab.org/earlymathpuzzlers/peano_giochi.html